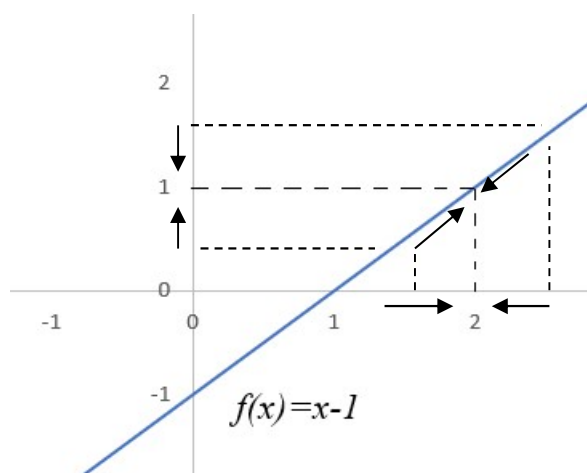


Όριο συνάρτησης:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ καλείται: "όριο της συνάρτησης f καθώς το x τείνει στο x_0 " και μας δείχνει πού πηγαίνουν οι τιμές $y=f(x)$ της συνάρτησης, καθώς τα x πλησιάζουν το x_0 .

Για παράδειγμα, από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x-1$ βλέπουμε ότι καθώς το $x \rightarrow 2$ τα y πλησιάζουν την τιμή 1 , οπότε συμπεραίνουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$



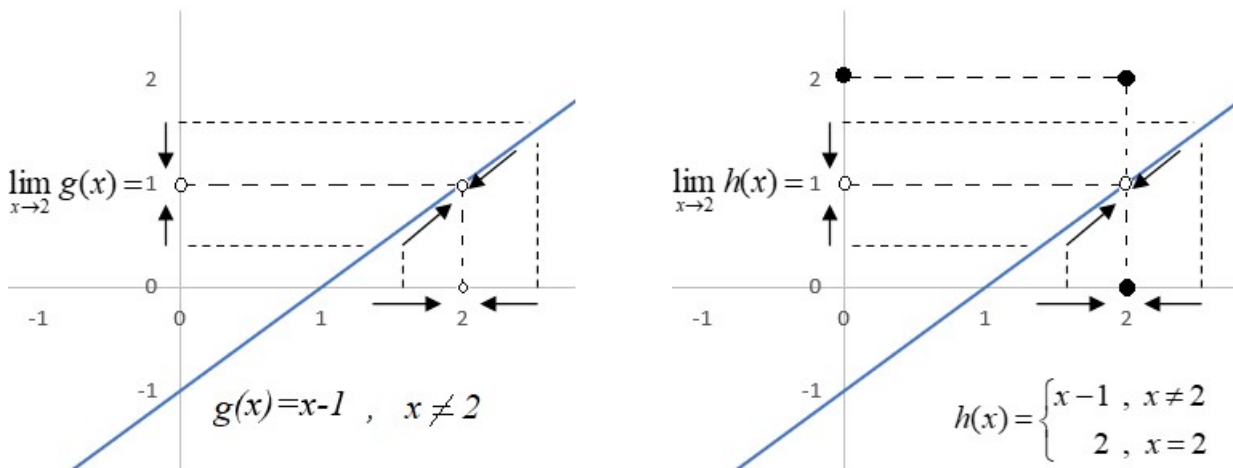
Προσοχή: Για να αναζητήσουμε το όριο μίας συνάρτησης καθώς $x \rightarrow x_0$, δεν είναι υποχρεωτικό η συνάρτηση να ορίζεται στο x_0 , αλλά να υπάρχει τρόπος να πλησιάσω όσο κοντά θέλω στο x_0 . Δηλαδή πρέπει και αρκεί η συνάρτηση να ορίζεται σε ένα σύνολο της μορφής: $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, δηλαδή σε διάστημα "**γύρω από το x_0** ".

Οπότε, κατά τη μελέτη του ορίου δεν μας ενδιαφέρει ούτε ποια είναι, ούτε αν υπάρχει η τιμή $f(x_0)$, αλλά πού **πλησιάζουν** οι τιμές $y=f(x)$ καθώς το x **πλησιάζει** στο x_0 .

Άρα και για τις συναρτήσεις:

- $g(x) = x - 1, x \neq 2$
- $h(x) = \begin{cases} x - 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 1$, όπως φαίνεται από τις γραφικές τους παραστάσεις:



Στην περίπτωση που η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται στο x_0 διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Στην περίπτωση αυτή, όπου η τιμή της f στο x_0 είναι ίση με το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 , λέμε ότι: "η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 ".

Μία συνάρτηση που είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, καλείται "συνεχής συνάρτηση".

B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι: "η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο x_0 ".

Παρατηρήσεις:

- Η συνέχεια ή η ασυνέχεια συνάρτησης είναι μία "σημειακή" ιδιότητα (ιδιότητα που αφορά σημείο και όχι διάστημα όπως η μονοτονία συνάρτησης), την οποία μελετάμε ΜΟΝΟ στα σημεία όπου ορίζεται η συνάρτηση, δηλαδή στα σημεία του πεδίου ορισμού, καθώς ο ορισμός της ιδιότητας απαιτεί την ύπαρξη του $f(x_0)$.
- Όλες οι γνωστές μας συναρτήσεις (πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές) είναι συνεχής συναρτήσεις. Επίσης, πράξεις συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Έτσι η συνάρτηση $2x^2-3x+1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική, η συνάρτηση $\sin x$ είναι συνεχής ως τριγωνομετρική και η συνάρτηση $2x^2-3x+1 - \sin x$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η δεύτερη παρατήρηση είναι πολύ σημαντική, καθώς για τον υπολογισμό του ορίου ξεφεύγουμε από την ανάγκη εποπτείας (γνώση γραφικής παράστασης) αφού, πλέον, για όλες τις γνωστές μας συναρτήσεις διαθέτουμε μία αλγεβρική μέθοδο υπολογισμού: την αντικατάσταση.

Αφού, λοιπόν, όλες οι γνωστές μας συναρτήσεις είναι συνεχείς, το όριό τους σε κάποιο x_0 θα υπολογίζεται με αντικατάσταση του x_0 στον τύπο τους, καθώς γνωρίζουμε ότι για όλες αυτές θα πρέπει να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 5x + 6) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 3x - 1 + \sin x) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 1 + 1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{12-x}} = \frac{\sqrt{3+1}}{1 - \sqrt{12-3}} = \frac{\sqrt{4}}{1 - \sqrt{9}} = \frac{2}{1-3} = -1$